

Théorie des ensembles

Les ensembles ont été brièvement présentés en début d'année, ici on étudie ceux-ci de manière plus approfondie.
 E, F, G, H désignent des ensembles.

1. Ensembles

1°) Inclusion

Déf : On dit que E est inclus dans F , et on note $E \subset F$, ssi tout élément de E est aussi élément de F .

Ainsi : $E \subset F \Leftrightarrow \forall x \in E, x \in F$.

Prop : $E = F \Leftrightarrow E \subset F$ et $F \subset E$.

Prop : $E \subset F$ et $F \subset G \Rightarrow E \subset G$.

2°) Sous ensemble

Déf : On appelle partie (ou sous-ensemble) d'un ensemble E tout ensemble A inclus dans E .

L'ensemble formé des parties de E est noté : $\mathcal{P}(E)$.

3°) Opérations dans $\mathcal{P}(E)$

Soit A, B, C trois parties d'un ensemble E .

a) union et intersection

Déf : On appelle union de A et B l'ensemble noté $A \cup B$ formé des éléments de E qui appartiennent à A ou à B :

Ainsi $A \cup B = \{x \in E / x \in A \text{ ou } x \in B\}$.

Déf : On appelle intersection de A et B l'ensemble noté $A \cap B$ formé des éléments de E qui appartiennent à A et à B :

Ainsi $A \cap B = \{x \in E / x \in A \text{ et } x \in B\}$.

Prop : $A \cup A = A, A \cap A = A$,

$A \cup E = E, A \cap E = A$,

$A \cup \emptyset = A, A \cap \emptyset = \emptyset$,

$A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$,

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$ noté $A \cup B \cap C$,

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$ noté $A \cap B \cup C$,

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ et

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Prop : Si $A \subset C$ et $B \subset C$ alors $A \cup B \subset C$,

Si $C \subset A$ et $C \subset B$ alors $C \subset A \cap B$.

b) complémentaire

Déf : On appelle complémentaire d'une partie A de E l'ensemble noté $C_E A$ formé des éléments de E qui ne sont pas dans A .

Ainsi $C_E A = \{x \in E / x \notin A\}$.

Prop : $C_E (C_E A) = A$,

$C_E (A \cup B) = C_E A \cap C_E B$,

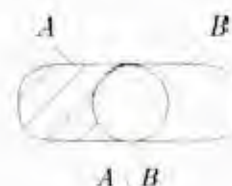
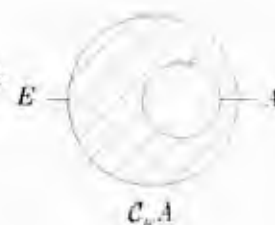
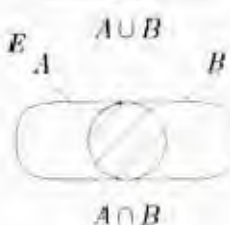
$C_E (A \cap B) = C_E A \cup C_E B$,

$A \subset B \Leftrightarrow C_E B \subset C_E A$.

c) différences

Déf : On appelle ensemble A privé de B l'ensemble noté $A \setminus B$ (ou $A - B$) constitué des éléments de E qui sont dans A sans être dans B . Ainsi :

$A \setminus B = \{x \in E / x \in A \text{ et } x \notin B\}$.



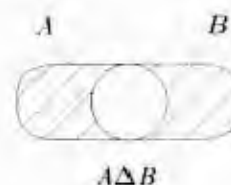
Prop : $A \setminus B = A \cap C_B(B)$.

Déf : On appelle différence symétrique de A et B l'ensemble noté $A \Delta B$ déterminé par $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Prop : $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

Prop : $A \Delta A = \emptyset$, $A \Delta \emptyset = A$ et $A \Delta E = C_E A$.

$A \Delta B = B \Delta A$ et $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$.



4°) Familles

I désigne un ensemble.

a) définition

Déf : On appelle famille d'éléments de E indexée sur I la donnée, pour tout $i \in I$ d'un élément de E , noté par a_i . Une telle famille est alors notée $(a_i)_{i \in I}$.

On note E^I l'ensemble des familles d'éléments de E indexées sur I .

Déf : Soit J une partie de I .

$(a_i)_{i \in J}$ est appelée sous famille de $(a_i)_{i \in I}$.

$(a_i)_{i \in I}$ est appelée sur famille de $(a_i)_{i \in J}$.

b) famille finie

Déf : Lorsque I est un ensemble fini, on dit que la famille est finie.

Lorsque $I = \{1, \dots, n\}$ on note souvent $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ au lieu de $(a_i)_{i \in I}$.

Cette famille est alors usuellement confondue avec le n -uplet : (a_1, \dots, a_n) .

c) suite

Déf : Lorsque $I = \mathbb{N}$, la famille $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est appelée suite d'éléments de E .

On note $E^{\mathbb{N}}$ l'ensemble de ces suites.

d) famille de parties d'un ensemble

Déf : On appelle famille de parties d'un ensemble E , toute famille $(A_i)_{i \in I}$ formée d'éléments de $\mathcal{P}(E)$ i.e. telle que $\forall i \in I, A_i \subset E$.

Déf : Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties de E . On pose :

$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \in E / \exists i \in I, x \in A_i\}$ appelée union de la famille $(A_i)_{i \in I}$.

$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \in E / \forall i \in I, x \in A_i\}$ appelée intersection de la famille $(A_i)_{i \in I}$.

En Particulier : Si $I = \emptyset$ alors : $\bigcup_{i \in I} A_i = \emptyset$ et $\bigcap_{i \in I} A_i = E$.

Déf : Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties de E .

On dit que $(A_i)_{i \in I}$ est un recouvrement de E ssi $\bigcup_{i \in I} A_i = E$.

Déf : On dit que $(A_i)_{i \in I}$ est une partition de E ssi c'est un recouvrement formée de parties non vides deux à deux disjointes.

II. Applications

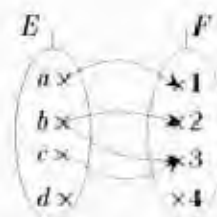
1°) Définition

Déf : On appelle graphe de E vers F toute partie Γ de $E \times F$.

E est appelé ensemble de départ et F ensemble d'arrivée du graphe g .

Déf : On dit qu'un graphe de E vers F est le graphe d'une application f de E vers F ssi $\forall x \in E, \exists! y \in F$ tel que $(x, y) \in \Gamma$.

Pour tout $x \in E$, l'unique $y \in F$ tel que $(x, y) \in \Gamma$ est appelé image de x par l'application f , on la note $f(x)$. Pour tout $y \in F$, les $x \in E$, s'il en existe, tels que $y = f(x)$ sont appelés antécédents de y par l'application f .



On note $f: E \rightarrow F$ pour signifier que f est une application de E vers F (définie par l'intermédiaire de son graphe).

On note $\mathcal{F}(E, F)$ l'ensemble des applications de E vers F .

Prop : Soit $f, g: E \rightarrow F$. On a $f = g \Leftrightarrow \forall x \in E, f(x) = g(x)$.

2°) Composition d'applications

Déf : Soit $f: E \rightarrow F$ et $g: F \rightarrow G$.

On appelle composée de f par g l'application $g \circ f: E \rightarrow G$ définie par :

$$\forall x \in E, (g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Symboliquement : $E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$
 $\xrightarrow{g \circ f}$

Prop : Soit $f: E \rightarrow F, g: F \rightarrow G$ et $h: G \rightarrow H$.

On a $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ encore noté $h \circ g \circ f$.

Prop : Soit $f: E \rightarrow F$.

On a $f \circ \text{Id}_E = f$ et $\text{Id}_F \circ f = f$.

3°) Injection et surjection

a) injection

Déf : Soit $f: E \rightarrow F$. On dit que f est injective ssi f ne prend jamais deux fois la même valeur i.e. : $\forall x, x' \in E, x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$.

Prop : Soit $f: E \rightarrow F$ et $g: F \rightarrow G$.

Si f et g sont injectives alors $g \circ f$ l'est aussi.

b) surjection

Déf : Soit $f: E \rightarrow F$. On dit que f est surjective ssi chaque élément de F possède au moins un antécédent par f i.e. : $\forall y \in F, \exists x \in E, y = f(x)$.

Prop : Soit $f: E \rightarrow F$ et $g: F \rightarrow G$.

Si f et g sont surjectives alors $g \circ f$ l'est aussi.

4°) Bijection

a) définition

Déf : Soit $f: E \rightarrow F$. On dit que f est bijective ssi chaque élément de F possède un unique antécédent par f dans E i.e. : $\forall y \in F, \exists! x \in E, y = f(x)$.

Prop : Soit $f: E \rightarrow F$. On a équivalence entre :

- (i) f est bijective,
- (ii) f est injective et surjective.

Prop : Soit $f: E \rightarrow F$ et $g: F \rightarrow G$.

Si f et g sont bijectives alors $g \circ f$ l'est aussi.

b) application réciproque

Prop : Soit $f: E \rightarrow F$ et $g: F \rightarrow G$.

Si $g \circ f$ est injective alors f est injective.

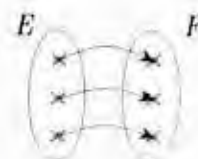
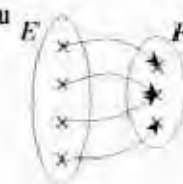
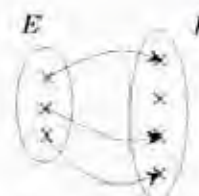
Si $g \circ f$ est surjective alors g est surjective.

Théorème :

Soit $f: E \rightarrow F$. On a équivalence entre :

- (i) f est bijective,
- (ii) $\exists g \in \mathcal{F}(F \rightarrow E)$ telle que $g \circ f = \text{Id}_E$ et $f \circ g = \text{Id}_F$.

De plus, si tel est le cas, l'application g ci-dessus est unique. On l'appelle application réciproque de f et on la note f^{-1} .



Cor : Soit $f: E \rightarrow F$. Si f est bijective alors on peut introduire $f^{-1}: F \rightarrow E$ et on a :
 $f^{-1} \circ f = \text{Id}_E$ et $f \circ f^{-1} = \text{Id}_F$.

Cor : Soit $f: E \rightarrow F$. Si on détermine $g: F \rightarrow E$ telle que $g \circ f = \text{Id}_E$ et $f \circ g = \text{Id}_F$ alors on peut conclure :
 f bijective et $f^{-1} = g$.

Prop : Soit $f: E \rightarrow F$. Si f est bijective alors f^{-1} est bijective et $(f^{-1})^{-1} = f$.

Prop : Soit $f: E \rightarrow F$ et $g: F \rightarrow G$. Si f et g sont bijectives alors $g \circ f$ aussi $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

c) permutation

Déf : On appelle permutation de E toute application bijective de E dans E .
On note $\mathfrak{S}(E)$ l'ensemble des permutations de E .

Prop : $\forall f, g \in \mathfrak{S}(E), f \circ g \in \mathfrak{S}(E)$ et $g \circ f \in \mathfrak{S}(E)$. $\forall f \in \mathfrak{S}(E), f^{-1} \in \mathfrak{S}(E)$.

Déf : On appelle involution de E toute application $f: E \rightarrow E$ telle que $f \circ f = \text{Id}_E$.

Prop : Soit $f: E \rightarrow E$. On a équivalence entre :

- (i) f est une involution.
- (ii) f est bijective et $f^{-1} = f$.

5°) Image directe, image réciproque d'une partie.

a) image directe

Déf : Soit $f: E \rightarrow F$ et $A \in \mathcal{P}(E)$.

On appelle image directe de A par f l'ensemble noté $f(A)$ formé des valeurs prises par f sur A .

Ainsi $f(A) = \{f(x) \text{ avec } x \in A\} = \{f(x) / x \in A\}$.

Déf : Soit $f: E \rightarrow F$. On appelle image de f l'ensemble noté $\text{Im } f$ constitué des valeurs prises par f sur E .

Ainsi $\text{Im } f = f(E) = \{f(x) / x \in E\}$.

Prop : $f: E \rightarrow F$ est surjective si et seulement si $\text{Im } f = F$.

b) image réciproque

Déf : Soit $f: E \rightarrow F$ et $B \in \mathcal{P}(F)$. On appelle image réciproque de B par f l'ensemble noté $f^{-1}(B)$ formé des antécédents des éléments de B . Ainsi $f^{-1}(B) = \{x \in E / f(x) \in B\}$.

6°) Prolongement et restriction d'une application

Déf : Soit $E, \tilde{E}, F, \tilde{F}$ quatre ensembles tels que $E \subset \tilde{E}$ et $F \subset \tilde{F}$.

Soit $f: E \rightarrow F$ et $\tilde{f}: \tilde{E} \rightarrow \tilde{F}$.

On dit que \tilde{f} prolonge f ssi $\forall x \in E, \tilde{f}(x) = f(x)$.

Déf : Soit $f: E \rightarrow F, A \subset E$ et $B \subset F$ telles que $\forall x \in A, f(x) \in B$.

On appelle restriction de f de A vers B l'application : $g: \begin{cases} A \rightarrow B \\ x \mapsto g(x) = f(x) \end{cases}$.

En particulier :

Soit $f: E \rightarrow F$ et $A \subset E$.

L'application restreinte $\begin{cases} A \rightarrow F \\ x \mapsto f(x) \end{cases}$ est appelée restriction de f à A (au départ) et est notée $f|_A$.

Soit $f: E \rightarrow F$ et $B \subset F$ telle que $\text{Im } f \subset B$.

L'application restreinte $\begin{cases} E \rightarrow B \\ x \mapsto f(x) \end{cases}$ est appelée restriction de f à l'arrivée dans B . On la note généralement encore f .



ETUSUP.com

Programmmation
Cours
Electricité
Physique
Résumés
Analyse
Livres
Exercices
Contrôles Continus
Langues
Thermodynamique
Multimedia
Divers
Economie
Travaux Dirigés
Chimie Organique
Informatique
Optique
Chimie
Diapo
Algèbre
Corrigés
Mathématiques
Mécanique
Travaux Pratiques
Droit

et encore plus..

